**Лекція № 28**

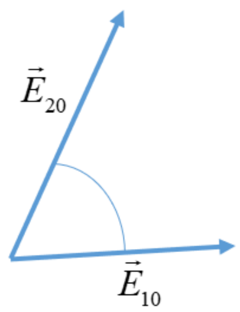
Комплексний вектор напруженості електричного поля пласкої монохроматичної хвилі

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \tag{8.30}$$

Амплітуду $\vec{E}_0$ теж слід вважати комплексним вектором:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{10} + i\vec{E}_{20}. \tag{8.31}$$

Тут $\vec{E}_{10}, \vec{E}_{20}$ – дійсні тривимірні вектори. Кут між ними може бути будь-яким.




Напруженість, як домовились визначається, як дійсна частина комплексного вектору:

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right);$$

Значок дійсної частини для всіх лінійних перетворень будемо опускати. Тільки при возведенні у степінь треба обов'язково попередньо виділити дійсну частину в формулі для напруженості.

Знайдемо зв'язок між $\vec{A}, \vec{E}, \vec{H}$ для випадку пласкої монохроматичної хвилі. Нехай $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$. Тоді

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right) = -\vec{A}_0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right) =$$

$$= i\frac{\omega}{c}\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = ik\vec{A}.$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} = \left[\nabla, \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right] = i\left[\vec{k}, \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right] = i\left[\vec{k}, \vec{A}\right].$$

Отримали такі формули:

$$\vec{E} = ik\vec{A}; \quad \vec{H} = i\left[\vec{k}, \vec{A}\right]. \tag{8.32}$$

8.6.1. Поляризація пласкої монохроматичної хвилі

Напруженість електричного пласкої монохроматичної хвилі описується формулою (8.30). Амплітуду задали комплексним вектором (8.31). Знайдемо квадрат комплексного вектору $\vec{E}_0$.

Квадрат комплексного вектору є комплексним числом. Виберемо таку початкову фазу хвилі, щоб

$$\vec{E}_0 = \vec{b}e^{i\varphi_0};\ \vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2,\ \vec{b}_1 \perp \vec{b}_2.$$

квадрат комплексного вектору $\vec{b}$ був дійсним числом

$$\vec{b}^{\,2} = b_1^2 - b_2^2 + 2i\underbrace{\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right)}_{=0} = b_1^2 - b_2^2;$$

$$\vec{E}_0^2 = \vec{b}^{\,2}e^{2i\varphi_0} = \left(b_1^2 - b_2^2\right)e^{2i\varphi_0}.$$

У вихідних позначеннях

$$\vec{E}_0^2 = \left(\vec{E}_0, \vec{E}_0\right) = E_{10}^2 - E_{20}^2 + 2i\left(\vec{E}_{01}, \vec{E}_{02}\right) = |\,\vec{E}_0\,|^2\, e^{2i\varphi_0}$$

Тоді

$$\left|\left(\vec{E}_0, \vec{E}_0\right)\right| = \left|\vec{b}^{\,2}\right|.$$

Напрямки дійсних векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ виберемо в якості напрямків двох декартових координат. Далі

$$\vec{E}_0 = \left(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2\right)e^{i\varphi_0}; \quad \vec{E} = \left(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2\right)e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0)}.$$

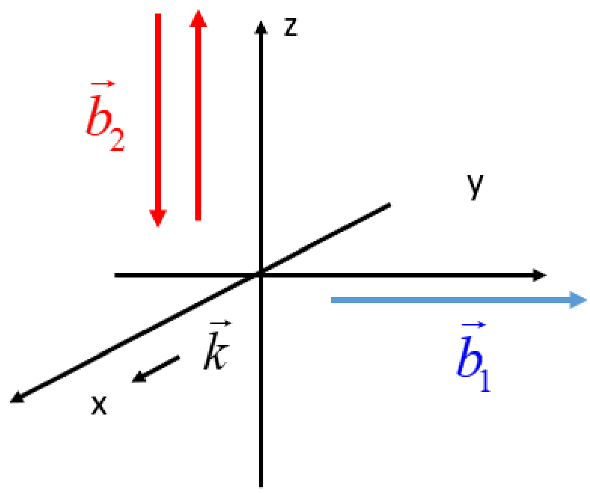
Згадаємо про “Re” у визначенні напруженості

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\left(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2\right)e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0)}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\left(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2\right)\left[\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0) + i\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0)\right]\right\} =$$

$$= \vec{b}_1\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0) - \vec{b}_2\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0).$$

Нехай хвиля розповсюджується уздовж осі $x$, а вектор $\vec{b}_1$ направлений уздовж осі $y$. Напрямок вектору $\vec{b}_2$ може бути тепер або уздовж осі $z$, або протилежно осі $z$. Хвиля розповсюджується уздовж додатного напрямку осі $x$.



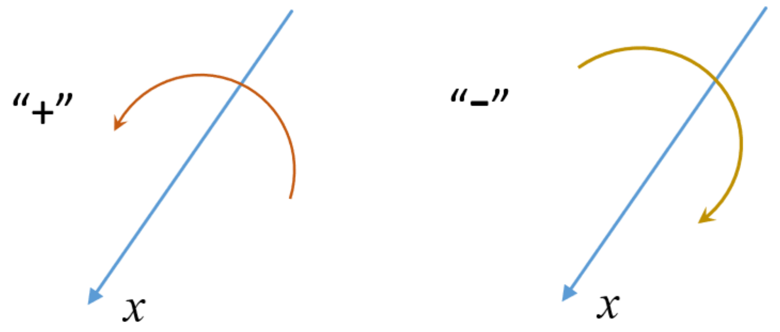

Проєкції вектору $\vec{E}$ на ці осі є такими:

$$\begin{cases} E_x = 0; \\ E_y(x,t) = b_1 \cos(kx - \omega t + \varphi_0); \\ E_z(x,t) = \pm b_2 \sin(kx - \omega t + \varphi_0). \end{cases} \tag{8.33}$$

Формули (8.33) є формулами рівняння еліпсу з напіввісями $b_1$ та $b_2$ у параметричній формі. Відповідне канонічне рівняння еліпсу:

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \tag{8.34}$$

Кінець вектору $\vec{E}$ в загальному випадку рухається в площині y0z по еліпсу. Обертання може бути або по годинниковій стрілці, або проти годинникової стрілки. Це **еліптична поляризація** хвилі. Виділяють «праву» поляризацію та «ліву» поляризацію (див. рис).




Права поляризація –
по напрямку правого гвинта

Ліва поляризація –
проти напрямку правого гвинта

Правоциркулярна поляризація хвилі – кінець вектору напруженості електричного поля обертається уздовж напрямку руху по правилу правого гвинта (знак «+» в формулі (8.33)). В лівоциркулярна поляризація хвилі – кінець вектору напруженості електричного поля обертається у напрямку протилежному напрямку правого гвинта (знак «–» в формулі (8.33)).

Окремі випадки:

**кругова поляризація** – $b_1 = b_2$ – кінець вектору $\vec{E}$ в площині y0z рухається по колу

**лінійна поляризація** – $b_1 \neq 0,\ b_2 = 0$ або $b_1 = 0,\ b_2 \neq 0$ – кінець вектору $\vec{E}$ в площині y0z рухається або уздовж осі y, або уздовж осі z відповідно.

Вектор напруженості магнітного поля, який визначається в пласкій хвилі формулою (8.14), а саме $\vec{H} = \left[\vec{n}, \vec{E}\right]$, також рухається по еліпсу, повернутому на $\pi / 2$.

Визначимо початкову фазу $\varphi_0$ через $\vec{E}_{10},\ \vec{E}_{20}$.

$$(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)e^{i\varphi_0} = \vec{E}_{01} + i\vec{E}_{02};$$

$$\vec{b}_1 + i\vec{b}_2 = \left(\vec{E}_{01} + i\vec{E}_{02}\right)e^{-i\varphi_0} =$$

$$= \left(\vec{E}_{01} + i\vec{E}_{02}\right)\left(\cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0\right);$$

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{E}_{01}\cos\varphi_0 + \vec{E}_{02}\sin\varphi_0; \\ \vec{b}_2 = -\vec{E}_{01}\sin\varphi_0 + \vec{E}_{02}\cos\varphi_0; \end{cases}$$

Вектори $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2$ є перпендикулярними, тому

$$\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right) = 0.$$

Далі:

$$\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2\right)=\left(\vec{E}_{01}\cos\varphi_0+\vec{E}_{02}\sin\varphi_0,-\vec{E}_{01}\sin\varphi_0+\vec{E}_{02}\cos\varphi_0\right)=0;$$

$$\left(E_{02}^2-E_{01}^2\right)\underbrace{\sin\varphi_0\cos\varphi_0}_{\frac{1}{2}\sin 2\varphi_0}+\left(\vec{E}_{01},\vec{E}_{02}\right)\left(\underbrace{\cos^2\varphi_0-\sin^2\varphi_0}_{\cos 2\varphi_0}\right)=0;$$

$$\frac{1}{2}\left(E_{02}^2-E_{01}^2\right)\sin 2\varphi_0+\left(\vec{E}_{01},\vec{E}_{02}\right)\cos 2\varphi_0=0;$$

$$\mathrm{tg}2\varphi_0=\frac{2\left(\vec{E}_{01},\vec{E}_{02}\right)}{E_{01}^2-E_{02}^2}. \tag{8.35}$$

При завданому значенні хвилевого вектору $\vec{k}$ можливі дві незалежні поляризації: 1. еліптична правоциркулярна та еліптична лівоциркулярна; 2. Дві взаємно перпендикулярні лінійні поляризації. Будь-яку еліптично поляризовану хвилю можна представити, як суперпозицію двох лінійно поляризованих хвиль та навпаки.

## 8.7.Ефект Допплера

Знайдемо закон перетворення частоти плаского електромагнітної хвилі, якщо джерело випромінювання хвиль рухається зі сталою швидкістю $V$, тобто при переході від однієї інерціальної системи до іншої.

Фаза плаского монохроматичної хвилі

$$\vec{k}\vec{r}-\omega t=k_x x+k_y y+k_z z-\omega t=k_x x+k_y y+k_z z-\left(\frac{\omega}{c}\right)\left(ct\right)=$$

$$=\underbrace{\left(-\frac{\omega}{c}\right)}_{k_0}\underbrace{\left(ct\right)}_{x^0}+k_1x^1+k_2x^2+k_3x^3=k_0x^0+k_1x^1+k_2x^2+k_3x^3=$$

$$=k_ix^i-\mathrm{inv}.$$

$$\vec{k}\vec{r}-\omega t=k_ix^i-\mathrm{inv}. \tag{8.36}$$

є релятивістським інваріантом, бо згідно закону перетворення напруженостей електричного та магнітного поля в напрямку руху системи відліку $\vec{V}$ ці компоненти не змінюються:

$$\vec{E}_{\parallel}=\vec{E}'_{\parallel};\;\; \vec{H}_{\parallel}=\vec{H}'_{\parallel}.$$

Таким чином, можемо ввести чотиривимірний хвилевий вектор $k^i$. Контраваріантні компоненти

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right). \tag{8.37}$$

Коваріантні компоненти (саме через них записали фазу (8.36)):

$$k_i = \left(-\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right) = \left(-\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right). \tag{8.38}$$

Перетворення Лоренца для контраваріантних компонент будь-якого 4-вектору для частинних перетворень Лоренца визначається формулами (1.51). Скористаємось цими формулами для компонент 4-хвилевого вектору

$$k^0 = \frac{k^{0'} + \frac{V}{c}k^{1'}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad k^1 = \frac{\frac{V}{c}k^{0'} + k^{1'}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad k^2 = k^{2'}; \quad k^3 = k^{3'}.$$

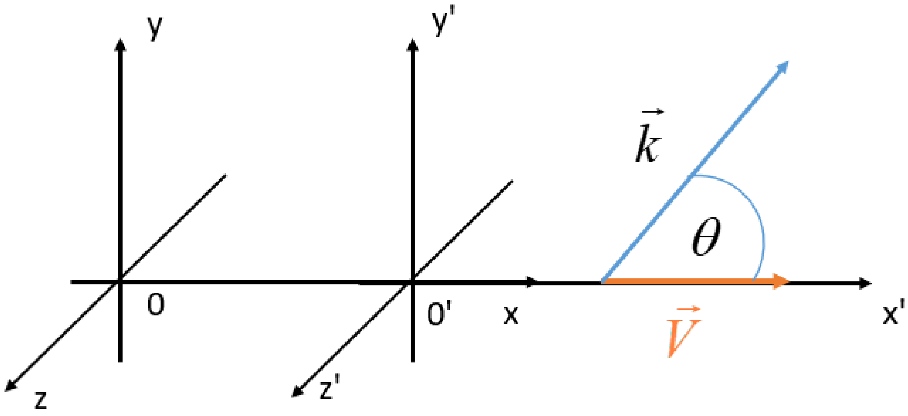
Обернені перетворення:

$$k^{0'} = \frac{k^0 - \frac{V}{c}k^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad k^{1'} = \frac{-\frac{V}{c}k^0 + k^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad k^{2'} = k^2; \quad k^{3'} = k^3.$$

Використаємо обернені перетворення

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}k_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad k_x' = \frac{-\frac{V}{c}\left(\frac{\omega}{c}\right) + k_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad k_y' = k_y; \quad k_z' = k_z.$$

Нехай спостерігач, який знаходиться в ІСВ $S$ приймає сигнал (електромагнітну хвилю) з частотою $\omega$. Джерело рухається відносно спостерігача уздовж осі $x$ зі швидкістю $V$. Випромінює пласку монохроматичну хвилю с точки зору спостерігача в $S$ у напрямку $\vec{k}$. Спостерігач в ІСВ приймає сигнал від джерела частоти $\omega' = \omega_0$. Шукаємо зв'язок між частотами в ІСВ $S'$ та ІСВ $S$ (див. рис.)




$$\omega' = \frac{\omega - Vk_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};\quad k'_x = \frac{k_x - \frac{V\omega}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};\quad k'_y = k_y;\quad k'_z = k_z.$$

$$k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta.$$

$$\omega' = \frac{\omega - V\frac{\omega}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};\quad \omega_0 = \frac{\omega\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отримали формулу для опису релятивістського ефекту Доплера

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)}. \tag{8.39}$$

Кут $\theta$ змінюється від $\theta = 0$ (джерело випромінює хвилю у спостерігача) до $\theta = \pi$ (джерело випромінює хвилю у напрямку від спостерігача). Розглянемо окремі випадки.

Нехай $\theta = 0$. Формула (8.39) приймає такий вигляд

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{V}{c}\right)} = \frac{\omega_0\sqrt{\left(1-\frac{V}{c}\right)\left(1+\frac{V}{c}\right)}}{\left(1-\frac{V}{c}\right)} = \omega_0\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}.$$

При наближенні джерела випромінювання до спостерігача частота випромінювання збільшується згідно з формулою:

$$\omega=\omega_0\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}};\quad \omega>\omega_0. \tag{8.40}$$

У випадку $\theta=\pi$. Формула (8.39) приймає такий вигляд

$$\omega=\frac{\omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{V}{c}\right)}=\frac{\omega_0\sqrt{\left(1-\frac{V}{c}\right)\left(1+\frac{V}{c}\right)}}{\left(1+\frac{V}{c}\right)}=\omega_0\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}}.$$

При віддаленні джерела випромінювання від спостерігача частота випромінювання зменшується за таким законом:

$$\omega=\omega_0\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}};\quad \omega<\omega_0. \tag{8.41}$$

Нехай джерело випромінює пласку монохроматичну хвилю у напрямку, перпендикулярному швидкості свого руху $\theta=\frac{\pi}{2}$. Формула (8.39) приймає тепер такий вигляд:

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}};\ \omega<\omega_0. \tag{8.42}$$

Частота випромінювання зменшується! Це число релятивістський ефект. При розгляді ефекту Доплера в рамках класичної механіки поперченого ефекту Доплера немає. Поперечний ефект Доплера є суто релятивістським ефектом.

Отримаємо формулу ефекту Доплера для малих швидкостей $\frac{V}{c}\ll 1$. У лінійному наближенні по малому параметру $\frac{V}{c}$ маємо

$$\frac{V}{c}\ll 1,\quad \omega=\frac{\omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)}\approx\frac{\omega_0\sqrt{1-\cancel{\frac{V^2}{c^2}}}}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)}\approx\omega_0\left(1+\frac{V}{c}\cos\theta\right);$$

формулу для класичного ефекту Доплера:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\cos\theta\right). \tag{8.43}$$

Згідно з класичною нерелятивістською формулою (8.43) поперечного ефекту Доплера не буде. Цей ефект є квадратичним по малому параметру $\dfrac{V}{c}$. Наближення для малих швидкостей руху джерела є таким

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right).$$

# 9. ПОЛЕ РУХОМИХ ЗАРЯДІВ

## 9.1. Запізнювальні потенціали

Розглянемо поле, яке створюють системи довільно рухомих зарядів. При розв'язку рівнянь Максвелла для потенціалів знехтуємо тим, що поле, створене рухомими зарядами , впливає на їхній рух.

Для потенціалів обираємо релятивістськи інваріанте калібрування Лоренца

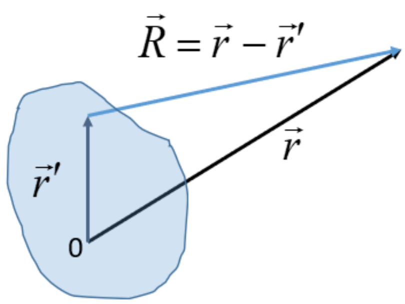
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} = 0.$$

При такому калібруванні всі компоненти потенціали задовольняють неоднорідним хвильовим рівнянням. Ці рівняння були нами отримані в параграфі 5.7:

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -4\pi\rho(\vec{r},t); \\ &\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння – сума загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння за умови, що заряди рухаються в обмеженому об'ємі.



В елементарному об’ємі $dV'$ знаходиться елементарний заряд $de$:

$$de = \rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)dV'.$$

Обираємо значення $de$ в точці $\vec{r}'$ із «запізненням» та час, який потрібен для того, щоб сигнал, відправлений зі швидкістю світла досяг точки спостереження $\vec{r}$, тобто пройшов відстань $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

$$\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = \frac{R}{c}.$$

В момент часу $t$ в точку $\vec{r}$ з точки $\vec{r}'$ надійде сигнал, який був посланий в момент часу

$$t' = t - \frac{R}{c}.$$

Скалярний потенціал, створений елементарним зарядом $de$ в момент часу $t$ визначається, як

$$d\varphi = \frac{de}{R}.$$

Згідно із принципом суперпозиції поле, створене в точці $\vec{r}$ в момент часу $t$ дорівнює

$$\varphi(\vec{r}, t) = \iiint\limits_V \frac{de}{R} = \iiint\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'.$$

Аналогічно знаходимо векторний потенціал. Елементарний струм

$$d\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) = \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)dV$$

створює поле із таким векторним потенціалом

$$d\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{d\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

Система струмів загалом створює згідно із принципом суперпозиції потенціал

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{d\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'.$$

Отримали такі розв'язки

$$\varphi(\vec{r},t)=\iiint\limits_V \frac{\rho_{t-R/c}}{R}dV';$$
$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R}dV'. \qquad (9.2)$$

В формулі (9.2) введені такі скорочені позначення

$$\rho_{t-R/c}=\rho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right);$$
$$\vec{j}_{t-R/c}=\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right).$$

Розв'язки (9.2) називають запізнювальними потенціалами. Вони є розв'язками неоднорідних хвильових рівнянь за умови, що заряди та струми рухаються у скінченному об'ємі.

Загальні розв'язки неоднорідних хвильових рівнянь (9.1) складаються із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$\varphi(\vec{r},t)=\varphi_0(\vec{r},t)+\iiint\limits_V \frac{\rho_{t-R/c}}{R}dV';$$
$$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_0(\vec{r},t)+\frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R}dV'. \qquad (9.3)$$

Розв'язки однорідних рівнянь $\varphi_0(\vec{r},t)$, $\vec{A}_0(\vec{r},t)$ визначаються початковими умовами – полем у початковий момент часу.

Як правило, завдано стан поля на великих відстанях від системи зарядів у будь-який момент часу – граничні умови. Тоді під ми $\varphi_0(\vec{r},t)$, $\vec{A}_0(\vec{r},t)$ маємо зовнішнє поле, що падає на систему зарядів, а запізнювальні потенціали є полем, яке створюють саме заряди, що досліджуються.